Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1

Existenz einer regulären Reduktion zu vorgegebenem Funktionenkörper als Restklassenkörper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Herbert Popp
aus Hals / Sudetenland

1965

8098

1964

Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1

Existenz einer regulären Reduktion zu vorgegebenem Funktionenkörper als Restklassenkörper

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

Herbert Popp

aus Hals / Sudetenland

1965

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Dezember 1964

Dekan:	Professor Dr. P. Roquette
1. Berichterstatter:	Professor Dr. P. Roquette
2. Berichterstatter:	Professor Dr. H. Wielandt

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

I n h a l t.

Einleitung und Ergebnisse.

Par. 1 Allgemeine Ergebnisse der Reduktionstheorie für Mannigfaltigkeiten. Bemerkungen über Singularitäten von Kurven.

1. Einiges über die Reduktion von Mannigfaltigkeiten und insbesondere von Kurven.

2. Bemerkungen über Singularitäten und Singularitätsgrad von Kurven.

3. Beweis von Existenzsatz I.

Par. 2 Der Beweis des Hauptsatzes.

4. Ein Satz über die Mannigfaltigkeit der ebenen Knotenkurven.

5. Ein Henselsches Lemma für Mannigfaltigkeiten.

6. Der Beweis des Existenzsatzes II.

7. Der Beweis des Hauptsatzes.

Einleitung und Ergebnisse.

Es sei k ein Körper der Charakteristik 0, $\mathfrak{p}$ eine komplette Stelle von k vom Rang 1. Der Restklassenkörper $\overline{k}$ von k modulo $\mathfrak{p}$ sei vollkommen und besitze unendlich viele Elemente.

Wir beweisen in der vorliegenden Arbeit den folgenden

Hauptsatz: Ist $\overline{K}/\overline{k}$ ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 mit $\overline{k}$ als genauem Konstantenkörper, so gibt es einen Funktionenkörper K/k derart, daß $\overline{K}/\overline{k}$ reguläre Reduktion von K/k modulo $\mathfrak{p}$ ist.

Dabei bedeutet "reguläre Reduktion": Die Divisorengruppe und Divisorenklassengruppe von K/k werden bei der Reduktion unter Erhaltung der arithmetischen Relationen zwischen Divisoren homomorph abgebildet. Die Geschlechter von K/k und $\overline{K}/\overline{k}$ sind gleich. Vgl. S.6.

Bei vorgegebenem Körper $\overline{k}$ der Charakteristik $p > 0$ existiert ein Körper k der Charakteristik 0 mit einer kompletten Stelle vom Rang 1 und $\overline{k}$ als Restklassenkörper. Vgl. Schilling [13], S.218. (Die dort gemachte Separabilitätsvoraussetzung ist nicht notwendig.)
In Verbindung mit dem Hauptsatz ergibt dies den

Satz: Jeder Funktionenkörper der Charakteristik $p > 0$ mit vollkommenem unendlichem Konstantenkörper ist reguläre Reduktion eines Funktionenkörpers der Charakteristik 0.

Der Hauptsatz ist schon in der Arbeit von Grothendieck [4] angegeben. Unser Beweis ist jedoch unabhängig von Grothendieck, und er ist elementar: es werden nur einfache Methoden der algebraischen Geometrie angewandt.

Wir benötigen zum Beweis zwei Sätze, die wir als Existenzsätze I und II formulieren.

Existenzsatz I: Jeder Funktionenkörper über vollkommenem unendlichem Grundkörper besitzt eine ebene Knotenkurve als Modell.
Knotenkurve bedeutet: Die Kurve hat nur Knoten als Singularitäten. Vgl. S.9.

Existenzsatz II: Ist $\overline{\Gamma}$ eine irreduzible, ebene, d-fache Knotenkurve mit Koeffizienten aus $\overline{k}$, dann gibt es eine ebene, d-fache Knotenkurve Γ mit Koeffizienten aus k, so daß $\overline{\Gamma}$ Reduktion von Γ modulo $\mathfrak{p}$ ist.

Existenzsatz I ist schon lange bekannt. Beweise dieses Satzes stehen bei Muhly/Zariski [9] und bei Lefschetz [8]. In Abschnitt 3 geben wir im wesentlichen den Beweis von Muhly und Zariski wieder.

In Par. 1 werden bekannte Ergebnisse der Reduktionstheorie für Mannigfaltigkeiten und der algebraischen Theorie der Kurven genannt, soweit sie für uns von Interesse sind.

In Par. 2 beweisen wir Existenzsatz II und den Hauptsatz.

Herrn Professor P. Roquette verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit und darüber hinaus, während der Zeit ihrer Entstehung, mannigfaltige Ratschläge.

Par. 1 Allgemeine Ergebnisse der Reduktionstheorie für Mannigfaltigkeiten. Bemerkungen über Singularitäten von Kurven.

1. Einiges über die Reduktion von Mannigfaltigkeiten und insbesondere von Kurven.

Es sei k ein Körper und $\mathfrak{p}$ eine Stelle von k, $\overline{k} = k_{\mathfrak{p}}$ sei der Restklassenkörper von k modulo $\mathfrak{p}$. Das Problem der Reduktionstheorie kann dann wie folgt formuliert werden: man untersuche die Beziehungen zwischen den Mannigfaltigkeiten und Zyklen über k und den Mannigfaltigkeiten und Zyklen über $\overline{k}$. Dieses Problem wurde von Deuring [2] für Kurven aufgestellt und behandelt. Shimura [15] und Roquette [10] haben das Problem für höhere Dimensionen untersucht. Alle genannten Arbeiten befassen sich, grob gesagt, mit der Frage: "welche arithmetischen Begriffsbildungen für Mannigfaltigkeiten über k bleiben bei Reduktion modulo einer Stelle von k erhalten und wann?"

Wir wiederholen hier die wichtigsten Ergebnisse aus der Arbeit von Roquette [10]. Zuvor einige Bezeichnungen und Definitionen.

$R_{\mathfrak{p}}$ bezeichne den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Stellenring und P^n bzw. $\overline{P}^n$ die projektiven Räume der Dimension n über k bzw. $\overline{k}$. $S = k[X_0,\dots,X_n] = k[X]$ sei der zu P^n im Sinne der algebraischen Geometrie gehörige graduierte Polynomring und entsprechend $\overline{S} = \overline{k}[X]$ der Polynomring von $\overline{P}^n$.

$R_{\mathfrak{p}}[X]$ bezeichne den graduierten Polynomring in n+1 Unbestimmten über $R_{\mathfrak{p}}$, wobei die Graduierung wieder durch den Polynomgrad bestimmt wird. Der von der Stelle $\mathfrak{p}$ auf $R_{\mathfrak{p}}$ induzierte Homomorphismus kann in kanonischer Weise fortgesetzt werden zu einem Homomorphismus des Polynomringes $R_{\mathfrak{p}}[X]$ auf den Polynomring $\overline{k}[X]$: das Bild eines Polynoms $f \in R_{\mathfrak{p}}[X]$ entsteht durch Reduktion der Koeffizienten von f modulo $\mathfrak{p}$. Wir bezeichnen den in dieser Weise definierten Homomorphismus von $R_{\mathfrak{p}}[X]$ auf $\overline{k}[X]$ wieder mit $\mathfrak{p}$ und das Bild eines Elements $f \in R_{\mathfrak{p}}[X]$ mit $\overline{f} = f_{\mathfrak{p}}$.

V sei eine projektive Mannigfaltigkeit über k, die in den P^n eingebettet ist. Dann gehört zu V in S ein graduiertes Ideal I(V), sein Relationenideal. $I(V) \cap R_{\mathfrak{g}}[X]$ ist ein Ideal in $R_{\mathfrak{g}}[X]$. Die Anwendung des Homomorphismus $\mathfrak{g}$ ergibt ein graduiertes Ideal in $\bar{k}[X]$. Dieses wird mit $I(V)\mathfrak{g}$ bezeichnet.

Wir definieren nun: Das Bild $V\mathfrak{g}$ der projektiven Mannigfaltigkeit V bei der Reduktion modulo $\mathfrak{g}$ ist die Nullstellenmannigfaltigkeit des Ideals $I(V)\mathfrak{g}$.

Das volle Relationenideal $I(V\mathfrak{g})$ von $V\mathfrak{g}$ ist dann gleich dem Radikal von $I(V)\mathfrak{g}$. $V\mathfrak{g}$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V\mathfrak{g})$ Primideal ist.

Wir definieren: V heißt irreduzibel modulo $\mathfrak{g}$, wenn $I(V)\mathfrak{g}$ Primideal ist.

Dann gilt insbesondere: $I(V)\mathfrak{g} = I(V\mathfrak{g})$, und man kann zeigen: ist I ein graduiertes Ideal in S und $I\mathfrak{g}$ ein Primideal, so ist auch I ein Primideal. Anders ausgedrückt heißt das: ist V irreduzibel modulo $\mathfrak{g}$, so ist V irreduzibel. Vgl. Roquette [10], S.12.

$R = S/I(V)$ sei der zu V gehörige graduierte Koordinatenring. Bedeutet $y = (y_i)_{i=0,\dots,n}$ das System der Restklassen von X modulo I(V), so ist y ein allgemeiner Punkt von V und $R = k[y]$.

Es gelten die folgenden Sätze (vgl. Roquette [10]):

Satz 1: Ist V irreduzibel modulo $\mathfrak{g}$, so sind die Dimensionen und die arithmetischen Geschlechter von V und $V\mathfrak{g}$ gleich. Bezeichnen K und $\bar{K}$ die Funktionenkörper von V bzw. $V\mathfrak{g}$ über k bzw. $\bar{k}$, so gibt es genau eine Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{g}$ auf K, so daß $y_0\mathfrak{P} : y_1\mathfrak{P} : \dots : y_n\mathfrak{P}$ gleich dem System der Koordinatenverhältnisse eines allgemeinen Punktes von $V\mathfrak{g}$ über $\bar{k}$ ist. $\mathfrak{P}$ ist träge, d.h. für jeden endlichen k-Teilmodul M von K gilt $\dim_k M = \dim_{\bar{k}} \bar{M}$; $\bar{M}$ ist das Bild von M bei Reduktion modulo $\mathfrak{P}$. (Diese Stelle $\mathfrak{P}$ von K hängt von dem Modell V ab, aber nicht im biregulären Sinne.)

Bemerkung: Im Falle eindimensionaler Funktionenkörper vom Geschlecht > 0 haben Deuring [3] und Lamprecht [7] gezeigt,

daß $\mathfrak{P}$ sogar birational invariant ist bei der zusätzlichen Forderung, daß die Geschlechter von K/k und $\overline{K}/\overline{k}$ übereinstimmen und $\overline{k}$ in $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Satz 2: Ist V singularitätenfrei[1] modulo $\mathfrak{g}$, so existiert in natürlicher Weise ein Homomorphismus der Divisorengruppe von V in die Divisorengruppe von $V_{\mathfrak{g}}$ unter Erhaltung der arithmetischen Relationen der Teilbarkeit und der linearen Äquivalenz zwischen Divisoren. Bei diesem Homomorphismus bleibt die virtuelle Dimension eines Divisors invariant.

Wir definieren: Im Falle der Dimension 1 heißt, unter der Voraussetzung von Satz 1, die Stelle $\mathfrak{P}$ und dann auch $\mathfrak{g}$ regulär, wenn $\overline{k}$ in $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist und die Geschlechter von K/k und $\overline{K}/\overline{k}$ übereinstimmen. Nach Lamprecht [7] liefert eine reguläre Stelle einen arithmetischen Homomorphismus der Divisorengruppe von K/k in die Divisorengruppe von $\overline{K}/\overline{k}$.

Für Kurven hat der Satz 1 wichtige Konsequenzen, die wir im folgenden genauer ausführen. Es sei also C eine Kurve, die irreduzibel modulo $\mathfrak{g}$ ist. Dann ist $\overline{C} = C_{\mathfrak{g}}$ ebenfalls eine Kurve. K bezeichne den Funktionenkörper von C und $\overline{K}$ den Funktionenkörper von $C_{\mathfrak{g}}$. Wir nehmen an, daß k in K und $\overline{k}$ in $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen sind. Dann gilt, wenn mit $\chi(C)$ und $\chi(C_{\mathfrak{g}})$ die arithmetischen Geschlechter der Kurven C und $C_{\mathfrak{g}}$ und mit g(C) bzw. $g(C_{\mathfrak{g}})$ die Geschlechter von C und $C_{\mathfrak{g}}$ im Sinne des Riemann-Rochschen Satzes bezeichnet werden:

$$\chi(C) = 1 - g(C), \quad \chi(C_{\mathfrak{g}}) = 1 - g(C_{\mathfrak{g}}).$$

[1]) Bei Roquette steht in dem entsprechenden Satz die stärkere Voraussetzung "V ist konservativ modulo $\mathfrak{g}$" statt "V ist singularitätenfrei modulo $\mathfrak{g}$"(vgl. Roquette [10], S.4 und S.5). Jedoch wird der Beweis dieses Satzes 2 bei Roquette so geführt, daß man mit der schwächeren Voraussetzung "V ist singularitätenfrei modulo $\mathfrak{g}$" auskommt, wenn die folgende Vermutung von Krull richtig ist: "Jeder reguläre Stellenring ist ein ZPE-Ring". Diese Vermutung ist inzwischen von Auslander und Buchsbaum bewiesen worden. Vgl. Zariski und Samuel [17], Appendix 7.

Die Geschlechter $g(C)$ und $g(C_{\mathfrak{P}})$ hängen mit den Geschlechtern der Funktionenkörper K und $\overline{K}$ durch die Formeln

$$g(C) = g(K) + \delta(C), \quad g(C_{\mathfrak{P}}) = g(\overline{K}) + \delta(C_{\mathfrak{P}})$$

zusammen, wobei $\delta(C)$ und $\delta(C_{\mathfrak{P}})$ die Singularitätszahlen von C bzw. $C_{\mathfrak{P}}$ bedeuten. Diese sind ≥ 0 und können nach Rosenlicht aus den Singularitäten von C bzw. $\overline{C}$ berechnet werden. Vgl. Rosenlicht [12] und auch Roquette [11]. Es ist $\delta(C) = 0$, wenn C singularitätenfrei ist. Entsprechendes gilt für $C_{\mathfrak{P}}$.
Ist nun C eine singularitätenfreie Kurve und ist C irreduzibel modulo $\mathfrak{P}$, so folgt aus dem obigen für die Geschlechter der Funktionenkörper K und $\overline{K}$:

$$g(K) = g(\overline{K}) + \delta(C_{\mathfrak{P}}).$$

Insbesondere gilt dann $g(K) \geq g(\overline{K})$, dabei $g(K) = g(\overline{K})$ genau dann, wenn auch $\overline{C}$ singularitätenfrei ist.

Bemerkung: Aus der Trägheit der Stelle $\mathfrak{p}$ folgt, wenn K/k und $\overline{K}/\overline{k}$ im körpertheoretischen Sinne regulär sind, $g(K/k) \geq g(\overline{K}/\overline{k})$. Vgl. Lamprecht [7], S.258. Ist C ein Modell von K/k und ist C irreduzibel modulo $\mathfrak{P}$, so ergibt sich daraus: der Singularitätsgrad von C ist grösser oder gleich dem Singularitätsgrad von $\overline{C}$.

Noch eine Bemerkung über die Reduktion ebener Kurven.
Es sei jetzt C eine ebene Kurve über k und $F(X_0, X_1, X_2)$ sei ein definierendes Polynom dieser Kurve von minimalem Grad mit ganzen Koeffizienten, die nicht alle durch $\mathfrak{P}$ teilbar sind. $\overline{F}$ sei die Reduktion von F modulo $\mathfrak{P}$. Die Forderung, die Kurve C sei irreduzibel modulo $\mathfrak{P}$, heißt dann gerade: $\overline{F}$ ist irreduzibel.
Ist der Grundkörper vollkommen und ist n (=Grad F) der Grad der ebenen Kurve C, so ist das geometrische Geschlecht $g(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Besitzt C dazu noch als Singularitäten genau d Knoten, so ist das Geschlecht des zu C gehörigen Funktionenkörpers $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$. Vgl. Abschnitt 2.

2. Bemerkungen über Singularitäten und Singularitätsgrad von Kurven.

k sei ein vollkommener Körper.
$\mathfrak{a}$ sei das definierende Ideal einer irreduziblen, projektiven Kurve Γ über k in einem P^n. K sei der Funktionenkörper von Γ.
Im folgenden ist ein Punkt immer ein algebraischer Punkt der betreffenden Mannigfaltigkeit, wenn nichts anderes gesagt ist.
Ist P ein algebraischer Punkt von Γ, so bezeichne $\mathfrak{o}_P$ den lokalen Ring von P auf Γ. Es ist genau dann $\mathfrak{o}_P = \mathfrak{o}_{P'}$, wenn die Punkte P über P' über k konjugiert sind.
Sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ Stellen von K/k, deren Bewertungsringe den Ring $\mathfrak{o}_P$ als lokalen Ring enthalten, so sagen wir, die Stellen $\mathfrak{p}_i$ liegen über P, und nennen P einen Ort der Stellen $\mathfrak{p}_i$ auf Γ. Über jedem Punkt P von Γ liegt mindestens eine Stelle $\mathfrak{p}$ von K. Es sei $R_{\mathfrak{p}}$ der Stellenring von $\mathfrak{p}$, dann gilt nach Definition $R_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{o}_P$.
Wir definieren: Die Stelle $\mathfrak{p}$ heißt einfach auf Γ, wenn $R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_P$, sonst heißt die Stelle $\mathfrak{p}$ singulär auf Γ. Die entsprechenden Bezeichnungen gelten für den Punkt P.

Wir gehen zu affinen Koordinaten über. $\tilde{\Gamma}$ sei die aus Γ entstehende affine Kurve und $\tilde{\mathfrak{a}}$ das Relationenideal von $\tilde{\Gamma}$. $k[v_\mu]$ sei der affine Koordinatenring von $\tilde{\Gamma}$. Die Stelle $\mathfrak{p}$ von K sei endlich auf $\tilde{\Gamma}$, d.h. die Werte $v_\mu \mathfrak{p}$ seien endlich. Dann ist $P = (v_\mu \mathfrak{p})$ ein Ort von $\mathfrak{p}$ auf $\tilde{\Gamma}$.

Es gilt der Satz:
Satz: Gleichwertig sind

(1) $\mathfrak{p}$ ist einfach auf Γ.
(2) $\mathfrak{o}_P$ ist ganz abgeschlossen.
(3) Ist $f = (f_\lambda)$ eine Basis für das Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$, so ist der Rang der Funktionalmatrix f' im Punkt P gleich n-1.
(4) $\mathfrak{p}$ ist die einzige Stelle über P, $\mathfrak{p}$ ist unverzweigt über dem affinen Koordinatenring $k[v_\mu]$

von $\tilde{\Gamma}$, und der Koordinatenkörper k(P) ist gleich dem Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$. (Die Stelle $\mathfrak{p}$ von K nennen wir unverzweigt über einem Teilring R von K, wenn eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$ in R liegt.)

Wir definieren: $\mathfrak{p}$ heißt linear auf Γ oder eine lineare Stelle von Γ, wenn $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist über dem lokalen Ring $\mathfrak{o}_P$ von P auf Γ.
Es gilt: $\mathfrak{p}$ ist genau dann linear auf Γ, wenn $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist über $k[y_\mu]$.
$\mathfrak{p}$ heißt auch eine lineare Stelle von $\tilde{\Gamma}$.

k sei jetzt algebraisch abgeschlossen. $\mathfrak{p}$ sei eine lineare Stelle von $\tilde{\Gamma}$ und t sei eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$. Es seien $y_\mu = y_\mu\mathfrak{p} + \sum_{\nu\geq 1} d_{\mu\nu} t^\nu$ die Potenzreihenentwicklungen der y_μ bezüglich der Stelle $\mathfrak{p}$. Weil $\mathfrak{p}$ auf $\tilde{\Gamma}$ linear ist, so gilt $d_{\mu 1} \neq 0$ für eines der $\mu = 1,\ldots,n$. O.E. sei $d_{\mu 1} \neq 0$. Dann nennen wir die durch die linearen Polynome $d_{\mu 1}(X_\mu - y_\mu\mathfrak{p}) - d_{\mu 1}(X_1 - y_1\mathfrak{p})$ $\mu = 2,\ldots,n$ definierte Gerade die Tangente in $\mathfrak{p}$ an $\tilde{\Gamma}$.

Bemerkung zum Begriff Knoten einer Kurve.

k sei ein vollkommener Körper, $\hat{k}$ bezeichne die algebraisch abgeschlossene Hülle von k. Γ sei eine irreduzible Kurve über k. Wenn Γ als Kurve über $\hat{k}$ betrachtet wird, so schreiben wir $\hat{\Gamma}$ statt Γ. $\hat{K}/\hat{k}$ sei der Funktionenkörper von Γ.

Wir definieren: Ein Punkt P von Γ heißt Knoten, wenn über P genau zwei bezüglich $\hat{\Gamma}$ lineare Stellen von $\hat{K}$ liegen, und die Tangenten dieser Stellen an $\hat{\Gamma}$ verschieden sind. Eine Kurve heißt d-fache Knotenkurve, wenn sie genau d Knoten als Singularitäten besitzt.
Ist $\tilde{\Gamma}$ eine ebene, irreduzible, affine Kurve über k mit dem definierenden Polynom $f(X_1,X_2)$ (f hat minimalen Grad) und dem Koordinatenring $k[x,y]$, so gilt:
Der Punkt P von $\tilde{\Gamma}$ ist genau dann Knoten von $\tilde{\Gamma}$, wenn $\partial_1 f(P) = \partial_2 f(P) = 0$ und $\partial_1^2 f(P)\,\partial_2^2 f(P) - (\partial_1\partial_2 f(P))^2 \neq 0$.

Wir zeigen zuerst: Ist P Knoten von f, so gelten die angegebenen Gleichungen und die Ungleichung.
Wir gehen zur Kurve $\hat{f}$ über. Diese besitzt im Punkt P zwei lineare Stellen φ_1 und φ_2. Wir denken uns o.E. das Koordinatensystem so gewählt, daß P der Nullpunkt ist und x Ortsuniformisierende von φ_1 und φ_2. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ bzw. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu x^\nu$ seien die Potenzreihenentwicklungen von y bezüglich φ_1 bzw. φ_2 nach der Ortsuniformisierenden x. Da φ_1 und φ_2 auf $\hat{f}$ verschiedene Tangenten besitzen, ist $\alpha_1 \neq \beta_1$.
Es sei zunächst Charakteristik $k \neq 2$. Wir entwickeln $f(X_1,X_2)$ um den Punkt P = (0,0) nach Taylor:

$$(*)\quad f(X_1,X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(P)X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}(P)X_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(P)X_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(P)X_1X_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(P)X_2^2\right) + r(X_1,X_2)$$

$r(X_1,X_2)$ enthält keine Monome vom Grad ≤ 2.
Setzt man in (*) die Potenzreihen für y ein, so ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial X_1}(P) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(P)\alpha_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial X_1}(P) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(P)\beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(P) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(P)\alpha_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(P)\alpha_1^2 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(P) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(P)\beta_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(P)\beta_1^2 = 0 . \end{cases}$$

Aus (1) folgt, wegen $\alpha_1 \neq \beta_1$: $\frac{\partial f}{\partial X_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial X_2}(P) = 0$

und aus (2), daß $\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(P) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(P) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(P)\right)^2 \neq 0$,

wenn sichergestellt ist, daß nicht alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f im Punkt P verschwinden. Dies folgt aus dem Bezoutschen Satz. Danach schneidet jede Gerade, die verschieden ist von den Tangenten der Stellen φ_1 und φ_2 an $\hat{f}$ die Kurve $\hat{f}$ in P zweifach (vgl. Chow [1], S.674).
Ist Charakteristik k = 2, so ist $f(x_1,X_2)$ von der Form

$$(**)\quad f(X_1,X_2) = aX_1^2 + bX_1X_2 + cX_2^2 + r(X_1,X_2),$$

wenn P der Nullpunkt des Koordinatensystems ist.

$r(X_1,X_2)$ enthält keine Monome vom Grad ≤ 2. a,b,c können nicht gleichzeitig 0 sein. Setzt man wieder die Potenzreihen für y in (**) ein, so erhält man die Gleichungen

$$a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 = 0$$
$$a + b\beta_1 + c\beta_1^2 = 0$$

und daraus, da Charakteristik k = 2, $b \neq 0$. Es gilt somit $\partial_1^2 f(P) = \partial_2^2 f(P) = 0$, $\partial_1\partial_2 f(P) = b \neq 0$, also die Behauptung.

Wir müssen noch die Umkehrung zeigen: Wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f im Punkt P verschwinden und $\partial_1^2 f(P)\cdot\partial_2^2 f(P) - (\partial_1\partial_2 f(P))^2 \neq 0$ ist, so ist P Knoten von $\tilde{\Gamma}$. Statt zur Kurve $\tilde{\Gamma}$ überzugehen, nehmen wir gleich an, der Grundkörper k sei algebraisch abgeschlossen und P sei der Nullpunkt des Koordinatensystems. Nach Voraussetzung schneidet jede Gerade durch P die Kurve $\tilde{\Gamma}$ mindestens zweifach in P und es gibt genau zwei verschiedene Geraden G_1 und G_2, die die Kurve $\tilde{\Gamma}$ in P mindestens dreifach schneiden. $\xi_1 X_1 - \eta_1 X_2$ bzw. $\xi_2 X_1 - \eta_2 X_2$ seien die definierenden Polynome von G_1 bzw. G_2. Die Geraden G_1 und G_2 haben nur den Punkt P = (0,0) gemeinsam. Nach dem Bézoutschen Satz (vgl. Chow [1], S.674) können über P höchstens zwei Stellen von K liegen, die dann notwendig bezüglich $\tilde{\Gamma}$ linear sind. Es genügt also zu zeigen, über P liegen zwei verschiedene Stellen von K. Wir nehmen an, es gibt nur eine Stelle $\mathfrak{P}$ von K über P. t sei eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}$. Dann haben die Potenzreihenentwicklungen von x bzw. y bezüglich $\mathfrak{P}$ – als Folge des Bézoutschen Satzes – die Gestalt $x = \sum_{\nu\geq 1}\alpha_\nu t^\nu$ und $y = \sum_{\nu\geq 1}\beta_\nu t^\nu$ mit $\alpha_1 \neq 0$ oder $\beta_1 \neq 0$.
Wir setzen in die definierenden Polynome der Geraden G_1 und G_2 die Potenzreihen für x und y ein und erhalten die Ausdrücke $\xi_1\sum_{\nu\geq 1}\alpha_\nu t^\nu + \eta_1\sum_{\nu\geq 1}\beta_\nu t^\nu$ und $\xi_2\sum_{\nu\geq 1}\alpha_\nu t^\nu + \eta_2\sum_{\nu\geq 1}\beta_\nu t^\nu$. Da G_1 und G_2 die Kurve in P dreifach schneiden gelten die Gleichungen $\xi_1\alpha_1 + \eta_1\beta_1 = 0$ und $\xi_2\alpha_1 + \eta_2\beta_1 = 0$. Daraus folgt $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Wir berechnen den Singularitätsgrad eines Knotens einer ebenen Kurve. Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine irreduzible, ebene, affine Kurve

und P ein Punkt von $\tilde{\Gamma}$. $k[x,y]$ sei der Koordinatenring von $\tilde{\Gamma}$ und O_p der lokale Ring von P. Wir nehmen zunächst an, k sei algebraisch abgeschlossen. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß P der Nullpunkt ist. P soll ein Knoten von $\tilde{\Gamma}$ sein. Dann liegen über P zwei lineare Stellen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit den Stellenringen R_1 und R_2, und wir können annehmen, x sei Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und y separabel über $k[x]$ (vgl. Abschnitt 4). Nach Definition ist der Singularitätsgrad von P gleich der k-Dimension des Faktormoduls $R_1 \cap R_2 / O_p$, denn bekanntlich ist der ganze Abschluss von O_p gleich $R_1 \cap R_2$.

Nach Rosenlicht [12], S.178, ist die Anzahl der über k linear unabhängigen O_p-Differentiale erster Gattung gleich $g + \delta$, wenn g das Geschlecht des Funktionenkörpers von $\tilde{\Gamma}$ und δ den Singularitätsgrad von $\tilde{\Gamma}$ bezeichnen. Dabei ist ein O_p -Differential ein Differential ω von K, für das gilt: $res_{\mathfrak{P}_1} f\omega + res_{\mathfrak{P}_2} f\omega = 0$ für alle $f \in O_p$. Ein O_p -Differential erster Gattung ist ein O_p -Differential, das außerhalb der Stellen von O_p , also außerhalb $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, keine Pole besitzt.

Wir zeigen: Ist ω ein O_p -Differential erster Gattung, so gilt $\omega(V(\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2) + K) = 0$, also $\omega \equiv 0$ modulo $(\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2)^{-1}$. ω kann in der Form $\omega = u\,dt$ geschrieben werden, wobei $u \in K$ und t eine separierende Transzendente von K/k ist. dt bedeutet die Differentiation nach t. Es sei jetzt t = x Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Dann sei $\sum_{\nu \geq \nu_0} a_\nu x^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von u bezüglich $\mathfrak{P}_1$ und $\sum_{\nu \geq \nu_0'} b_\nu x^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von u bezüglich $\mathfrak{P}_2$. Es sei $-1 + \nu_0 \leq \nu_0'$, $a_{\nu_0} \neq 0$, $b_{\nu_0'} \neq 0$, $\nu_0 \leq -1$.

Wir betrachten das Differential $x^{-\nu_0-1}\omega$. Dieses ist ein O_p-Differential, d.h. $res_{\mathfrak{P}_1} x^{-\nu_0-1}\omega + res_{\mathfrak{P}_2} x^{-\nu_0-1}\omega = 0$. Daraus folgt $\nu_0 = \nu_0'$ und $a_{\nu_0} + b_{\nu_0'} = 0$ (1). Es sei $\sum_{\nu \geq 1} \alpha_\nu x^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von y bezüglich $\mathfrak{P}_1$ und $\sum_{\nu \geq 1} \beta_\nu x^\nu$ die von y bezüglich $\mathfrak{P}_2$. Dann ist nach Voraussetzung $\alpha_1 \neq \beta_1$. Das Differential $y^{-\nu_0-1}\omega$ ist wieder ein O_p -Differential, also ist $res_{\mathfrak{P}_1} y^{-\nu_0-1}\omega + res_{\mathfrak{P}_2} y^{-\nu_0-1}\omega = 0$, d.h. $\alpha_1 a_{\nu_0} + \beta_1 b_{\nu_0} = 0$ (2).

Aus (1) und (2) folgt $a_{\nu_0} = b_{\nu_0} = 0$ und das ist ein Widerspruch. Alle O_p -Differentiale erster Gattung sind somit $\equiv 0$ modulo $(\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2)^{-1}$. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist nun

die Anzahl $l^*((\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^{-1})$ der über k linear unabhängigen Differentiale ω, die $\equiv 0$ modulo $(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2)^{-1}$ sind: $l^*((\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^{-1}) = l(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) + \text{Grad}\,(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2) + g - 1 = g+1$. Also ist $\delta(0_P) = 1$.

Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so gehen wir zur algebraisch abgeschlossenen Konstantenerweiterung über. Wir unterscheiden die Fälle: 1) Über P liegen zwei Stellen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von K/k. Dann spaltet jede der Stellen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ bei unserer Konstantenerweiterung in so viele Stellen auf wie der Grad (k(P):k) angibt. 2) Über P liegt eine Stelle $\mathfrak{p}$ von K/k. Dann ist $(K\mathfrak{p}:k(P)) = 2$ und $\mathfrak{p}$ spaltet in (k(P):k) Paare von Stellen auf. Jedes dieser Paare liegt über einem Punkt P' von Γ, der zu P über k konjugiert ist. Es gilt somit: ist P ein Knoten von Γ, so ist der Singularitätsgrad des lokalen Rings 0_P von P auf Γ gleich der Anzahl der zu P über k konjugierten Punkte. Die Singularitätsgrade der einzelnen Knotenpunkte addieren sich. Wir haben damit die schon auf Seite 7 erwähnte Tatsache bewiesen: der Singularitätsgrad einer d-fachen, ebenen Knotenkurve ist d.

3. Beweis von Existenzsatz I.

Es sei K/k ein Funktionenkörper vom Geschlecht g. Der Konstantenkörper k sei vollkommen und besitze unendlich viele Elemente. $\hat{k}$ sei die algebraisch abgeschlossene Hülle von k.

Wir skizzieren die Beweisidee. Es sei C ein geeignetes, singularitätenfreies Modell von K/k in einem P^n. C projezieren wir von einem P^{n-3}(P^n) aus auf eine Ebene des P^n derart, daß das Bild eine Knotenkurve ist.

Es sei $\mathfrak{x}$ ein ganzer Divisor von der Form $\mathfrak{x} = \prod_{\nu=1}^{m} \mathfrak{p}_\nu$. Die $\mathfrak{p}_\nu$ seien paarweise verschiedene Primdivisoren. Es sei $\text{Grad}\,\mathfrak{x} > 3g+2$. Wir betrachten den Vielfachenmodul des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{x}}$ und bezeichnen ihn mit $K(\frac{1}{\mathfrak{x}})$. $1, x_1, \ldots, x_n$ sei eine k-Basis von $K(\frac{1}{\mathfrak{x}})$. Dann gilt nach dem Riemann-Rochschen Satz: $n = \text{Grad}\,\mathfrak{x} - g$. Weiter ist $K = k(x_1, \ldots, x_n)$. Dies sieht man wie folgt: Wegen $\text{Grad}\,\mathfrak{x} > 3g$ ist $K(\frac{1}{\mathfrak{x}})^\nu = K(\frac{1}{\mathfrak{x}^\nu})$ für alle natürlichen Zahlen. (Vgl. Hasse[5].) Somit ist $\bigcup_\nu K(\frac{1}{\mathfrak{x}^\nu}) = k[x_1, \ldots, x_n] = \bigcap_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{x}} R_\mathfrak{p}$. $R_\mathfrak{p}$ bezeichnet den Stellenring der Stelle $\mathfrak{p}$. Der Quotientenkörper von $\bigcap_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{x}} R_\mathfrak{p}$

ist gleich K nach dem verschärften Approximationssatz.

Wir behaupten: die Basis $1,x_1,\ldots,x_n$ kann durch eine lineare Transformation mit Koeffizienten aus k so abgeändert werden, daß der Nennerdivisor von x_ν, Bez.: $\mathfrak{N}(x_\nu)$, für alle $\nu = 1,\ldots,n$ gleich $\mathfrak{r}$ ist. Wir gehen schrittweise wie folgt vor: es sei $x_1' = \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} x_\nu$ mit $a_{1\nu} \in k$, so daß $a_{11} \neq 0$ und $\mathfrak{N}(x_1') = \mathfrak{r}$. Da k unendlich ist, und für jedes $\mathfrak{p} | \mathfrak{r}$ gilt $\mathfrak{p} | \mathfrak{N}(x_\nu)$ für ein ν, ist dies möglich. Dann ist $1,x_1',x_2,\ldots,x_n$ eine Basis von $K(\frac{1}{\mathfrak{r}})$, von der x_1' die gewünschten Eigenschaften besitzt. Es sei $x_2' = a_{21}x_1' + \sum_{\nu=2}^{n} a_{2\nu} x_\nu$ mit $a_{2\nu} \in k$, $a_{22} \neq 0$ und $\mathfrak{N}(x_2') = \mathfrak{r}$. Dann ist $1,x_1',x_2',x_3,\ldots$ eine Basis von $K(\frac{1}{\mathfrak{r}})$ und x_1',x_2' besitzen die gewünschten Eigenschaften, usw..

Es sei also jetzt $1,x_1,x_2,\ldots,x_n$ eine Basis von $K(\frac{1}{\mathfrak{r}})$ mit $\mathfrak{N}(x_\nu) = \mathfrak{r}$ für $\nu = 1,\ldots,n$. Dann ist K über $k(x_1)$ separabel. Dies sieht man wie folgt: Nach Hasse [6], S.319 gilt: ist $x \in K$, so ist $K/k(x)$ separabel, wenn $x \notin K^p$ (p = Charakteristik K). Wäre $x_1 \in K^p$, so wäre der Hauptdivisor von x_1 eine p-te Divisorpotenz und daher auch der Nennerdivisor von x_1. Dies ist nicht möglich, weil $\mathfrak{N}(x_1) = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ Produkt von paarweise verschiedenen Primdivisoren ist.
Wir betrachten weiter die folgende Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &\longrightarrow x_1 \\ x_2 &\longrightarrow \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x_\nu \qquad u_\nu \in k \,,\, u_1 \neq 0 \\ x_\nu &\longrightarrow x_\nu \qquad \nu \geq 3 \,. \end{aligned}$$

Die u_ν können dann so gewählt werden, daß $y = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x_\nu$ ein primitives Element für die Erweiterung $K/k(x_1)$ ist mit $\mathfrak{N}(y) = \mathfrak{r}$. Dann ist y ganz über $k[x_1]$.
C sei die durch den Punkt $(1,x_1,y,x_3,\ldots,x_n)$ im projektiven Raum P^n definierte Kurve. C ist ein singularitätenfreies Modell des Körpers K/k. Wir wollen zeigen, C besitzt keine Trisekanten, keine Tangenten, die sich schneiden -also komplanar sind, und schliesslich liegen keine vier Punkte von C in einer Ebene. Um dies nachzuweisen betrachten wir die Kurve C über der algebraisch abgeschlossenen Hülle $\hat{k}$ von k, wir gehen also zur algebraisch abgeschlossenen Konstantenerweiterung $K\hat{k}/\hat{k} = \hat{K}/\hat{k}$ von K/k über. Aus dem k-Modul $K(\frac{1}{\mathfrak{r}})$ entsteht der $\hat{k}$-Modul $\hat{K}(\frac{1}{\hat{\mathfrak{r}}})$, wenn $\hat{\mathfrak{r}}$ das Bild des Divisors $\mathfrak{r}$ bei der obigen Konstantenerweiterung ist. Es sei N_1N_2 eine Trisekante von C. N_3 sei ein weiterer Schnittpunkt von C

mit der Geraden N_1N_2. $\mathfrak{P}_\nu$ sei die über N_ν liegende Stelle von $\hat{K}/\hat{k}$, $\nu = 1,2,3$. Dann gilt $\dim_{\hat{k}} \hat{K}(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2) = \dim_{\hat{k}} \hat{K}(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)$, weil N_1N_2 die Kurve in N_3 schneidet. Dies widerspricht dem Riemann-Rochschen Satz; die Kurve besitzt also keine Trisekante. Entsprechend beweist man die anderen Behauptungen.

Die projektive, ebene Kurve Γ mit dem allgemeinen Punkt $(1,x_1,\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x_\nu) = (1,x_1,y)$ ist ebenfalls ein Modell von K/k. Wir wollen y so wählen, daß die Singularitäten von Γ nicht mit den Verzweigungspunkten des Körpers $K/k(x_1)$ zusammenfallen. Wir gehen dazu wieder zur algebraisch abgeschlossenen Konstantenerweiterung über. $a_1,\ldots,a_r$ seien alle Elemente aus $\hat{k}$, so daß die Stellen $\mathfrak{p}_\nu$ von $\hat{k}(x_1)$ mit $x_1\mathfrak{p}_\nu = a_\nu$ bei Fortsetzung auf $\hat{K}$ sich verzweigen. (Die bezüglich x_1 unendlichen Stellen von $\hat{K}$ sind unverzweigt über $\hat{k}(x_1)$, denn wegen $n(x_1) = r$ ist $\frac{1}{x_1}$ Ortsuniformisierende dieser Stellen.) $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_s$ seien alle Fortsetzungen der $\mathfrak{p}_\nu$ auf $\hat{K}$. Die Punkte $P_\nu = (1,x_1\mathfrak{P}_\nu,\ldots,x_n\mathfrak{P}_\nu)$ von C, über denen die Stellen $\mathfrak{P}_\nu$ liegen, sind voneinander verschieden und einfache Punkte von C, d.h. mindestens eines der Elemente $(x_\mu - x_\mu\mathfrak{P}_\nu)$ ist Ortsuniformisierende der Stelle $\mathfrak{P}_\nu$. Wir wählen nun die $u_\mu \in k$ so, daß die Punkte $P_\nu' = (1,x_1\mathfrak{P}_\nu,\sum_{\mu=1}^{n} u_\mu(x_\mu\mathfrak{P}_\nu))$ von Γ verschieden sind und daß $y - (y\mathfrak{P}_\nu)$ Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_\nu$ ist. (Die u_μ dürfen keiner von endlich vielen linearen Gleichungen genügen!) Diese Wahl der u_μ bedeutet gerade, daß die P_ν' einfache Punkte von Γ sind.

Aus der Wahl der u_μ folgt jetzt: alle Stellen von K/k sind bezüglich der Kurve Γ linear. Das ist klar für diejenigen Stellen $\mathfrak{P}$ von K, die über $k(x_1)$ unverzweigt sind. Ist aber $\mathfrak{P}$ verzweigt über $k(x_1)$ und ist $P' = (x_1\mathfrak{P},y\mathfrak{P})$ ein Ort von $\mathfrak{P}$ auf Γ, so ist P' einfacher Punkt von Γ und deshalb $\mathfrak{P}$ linear auf Γ.

Wir wollen im folgenden nachweisen, daß bei geeigneter Wahl der Elemente u_μ die Kurve Γ höchstens Knoten als Singularitäten besitzt. Dazu betrachten wir die Diskriminante $d(x_1,u_\mu)$ der Kurve Γ. Es gilt (vgl. Hasse[6], S.450)

$$d(x_1,u_\mu) = p(x_1,u_\mu)^2 \cdot \Delta(x_1),$$

wobei $p(x_1,u_\mu)$ ein ganzrationaler Ausdruck in x_1 und u_μ ist. $\Delta(x_1)$ ist die Körperdiskriminante von K über $k(x_1)$.

Wir zeigen: (1) Sind $p(x_1,u)$ und $\Delta(x_1)$ teilerfremd -bei der obigen Wahl der u_μ ist das der Fall- und ist a einfache Nullstelle von $p(x_1,u_\mu)$, so gibt es einen Punkt P = (1,a,b) mit erster Koordinate a, der Knoten von Γ ist, und es gibt keinen weiteren singulären Punkt Q von Γ ebenfalls mit der ersten Koordinate a.

Beweis: a ist doppelte Nullstelle von $d(x_1,u) = d(y)$. Weil $\Delta(a) \neq 0$, ist (x_1-a) Ortsuniformisierende jeder Stelle $\mathfrak{P}_\nu$ von $\hat{K}$ mit $x_1\mathfrak{P}_\nu = a$. Es sei $\hat{k}((x_1-a))$ der Potenzreihenkörper in x_1-a über $\hat{k}$. Dann entsprechen die $\hat{k}$-isomorphen Einbettungen φ_ν von $\hat{K}/\hat{k}$ in $\hat{k}((x_1-a))$ den Stellen $\mathfrak{P}_\nu$ von $\hat{K}/\hat{k}$ mit $x_1\mathfrak{P}_\nu = a$ umkehrbar eindeutig. Es sei $y_\nu = \varphi_\nu(y) = b_\nu + c_\nu\cdot(x_1-a) + d_\nu\cdot(x_1-a)^2 + \cdots$. Dann ist $d(y) = \prod_{\nu,\mu=1,\ \nu\neq\mu}(y_\nu - y_\mu)$ und man sieht: ist a zweifache Nullstelle von d(y), so gibt es genau ein Paar (ν,μ) mit $\nu\neq\mu$ und $b_\nu = b_\mu = b$, $c_\nu \neq c_\mu$. Der Punkt P = (1,a,b) ist ein Knoten von Γ.

(2) Für Unbestimmte u_μ besitzt $p(x_1,u_\mu)$ nur einfache Nullstellen in x_1.

Beweis: Wir nehmen an, das Polynom $p(x_1,u_\mu)$ besitze für Unbestimmte u_μ Doppelwurzeln. $q(x_1,u_\mu)$ enthalte alle Doppelwurzeln von $p(x_1,u_\mu)$. Dann sind $q(x_1,u_\mu)$ und $\Delta(x_1)$ teilerfremd, denn es gibt ja Spezialisierungen u_μ° der u_μ in k, so daß $q(x_1,u_\mu^\circ)$ und $\Delta(x_1)$ teilerfremd sind. Ist $a\in\hat{k}$, so ist die Bedingung $q(a,u_\mu) = 0$ hinreichend, daß a doppelte Nullstelle von $p(x_1,u_\mu)$ ist. Bei festem $a\in\hat{k}$ bilden somit die Systeme u_μ mit $q(a,u_\mu) = 0$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\geq n-1$. Andererseits zeigen wir weiter unten: die Forderung "a sei Doppelwurzel von $p(x_1,u_\mu)$" impliziert für die u_μ zwei unabhängige lineare Bedingungen. D.h. die Systeme u_μ der Art, daß a Doppelwurzel von $p(x_1,u_\mu)$ ist, liegen höchstens in einer Mannigfaltigkeit mit einer Dimension $\leq n-2$, und das ist ein Widerspruch.

Wir gehen zur algebraisch abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\hat{K}/\hat{k}$ von K/k über. Es sei a ein Element aus $\hat{k}$ und $\Delta(a) \neq 0$. $\mathfrak{P}_1\cdot\cdots\cdot\mathfrak{P}_m$ sei der Zählerdivisor von x_1-a in $\hat{K}$.

Dann ist $\mathfrak{P}_\nu \neq \mathfrak{P}_\mu$ für $\nu \neq \mu$, und $(x_1 - a)$ ist Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt: $d(y) = \prod_{\nu,\mu=1;\nu\neq\mu}^{n} (y_\nu - y_\mu)$. Wir haben zu überlegen, wann a Nullstelle von $d(y)$ mit einer Vielfachheit $\geqslant 2$ ist. Offensichtlich trifft das genau dann zu, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) für drei verschiedene der y_ν, o.E. für y_1, y_2, y_3 ist
$b_1 = b_2 = b_3 = b$, d.h. $y - b \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3)$

b) für vier der y_ν, o.E. für y_1, y_2, y_3, y_4 gilt
$b_1 = b_2 = b'$, $b_3 = b_4 = b''$, d.h. $y - b' \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$
$y - b'' \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4)$

c) für zwei der y_ν, etwa für y_1, y_2 ist
$b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = c$, d.h. $y - b - c(x_1 - a) \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^2)$.

Es ist $y = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x_\nu$ und es sei $x_\lambda \mathfrak{P}_j = a_{\lambda j} \ (\in \hat{k})$.
Dann gilt: die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}, & a_{21} - a_{22}, & \cdots, & a_{n1} - a_{n2} \\ a_{11} - a_{13}, & a_{21} - a_{23}, & \cdots, & a_{n1} - a_{n3} \end{pmatrix}$ ist vom Rang 2, sonst wären die Punkte $(a_{1\nu}, \ldots, a_{n\nu})_{\nu=1,2,3}$ von C kollinear, d.h. C würde eine Trisekante besitzen. Entsprechend zeigt man, daß die Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}, & a_{21} - a_{22}, & \cdots, & a_{n1} - a_{n2} \\ a_{12} - a_{14}, & a_{23} - a_{24}, & \cdots, & a_{n3} - a_{n4} \end{pmatrix}$ vom Rang 2 ist, sonst wären nämlich die Punkte $(a_{1\nu}, \ldots, a_{n\nu})_{\nu=1,\ldots,4}$ komplanar. Es sei $\frac{x_i - a_{ij}}{x_1 - a} \mathfrak{P}_j = b_{ij}$, dann ist die Matrix $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}, & \cdots, & a_{n1} - a_{n2} \\ b_{11} - b_{12}, & \cdots, & b_{n1} - b_{n2} \end{pmatrix}$ vom Rang 2, denn sonst wären die Tangenten in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an C komplanar. Damit nun die Bedingung a) erfüllt ist, muß das System $u_1, \ldots, u_n$ den Gleichungen $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - a_{i2}) u_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - a_{i3}) u_i = 0$ genügen. Die Bedingung b) besagt $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - a_{i2}) u_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} (a_{i3} - a_{i4}) u_i = 0$ und schließlich die Bedingung c) $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - a_{i2}) u_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} (b_{i1} - b_{i2}) u_i = 0$.
Natürlich existieren dann auch Spezialisierungen u_μ° in k der Unbestimmten u_μ, so daß $p(x_1, u_\mu^\circ)$ und $\triangle(x_1)$ teilerfremd sind und $p(x_1, u_\mu^\circ)$ nur einfache Nullstellen besitzt. ($p(x_1, u_\mu^\circ)$ hat nur einfache Nullstellen, wenn die u_μ° so gewählt werden, daß die Diskriminante von $p(x_1, u_\mu)$, $p(x_1, u_\mu)$ betrachtet als Polynom in x_1, das n-Tupel u_μ° nicht als Nullstelle besitzt.)

Wir wollen den u_μ noch eine Bedingung auferlegen, so daß die Kurve $\Gamma \equiv (1, x_1, y)$ im Unendlichen singularitätenfrei ist.

Es genügt dazu, die u_μ so zu wählen, daß bei der Projektion von C auf Γ die bezüglich x_1 unendlich fernen Punkte von C verschieden abgebildet werden. $\mathfrak{P}_1', \ldots, \mathfrak{P}_n'$ seien die bezüglich x_1 unendlichen Stellen von $\hat{K}$. Es sei $\frac{x_i}{x_1}\mathfrak{P}_j' = c_{ij}$ und $\Theta_{ij}(u) = \sum_{\mu=0}^{m}(c_{\mu i} - c_{\mu j})u_\mu$, $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$. Dann ist unsere Forderung erfüllt, wenn $\Theta_{ij}(u) \neq 0$ für alle $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$.

Wir fassen zusammen:
Ist K/k ein Funktionenkörper mit unendlichem vollkommenem Grundkörper, so gibt es ein singularitätenfreies Modell C von K/k mit dem allgemeinen Punkt $P = (1, x_1, y, x_3, \ldots, x_n)$, so daß für die Koordinaten von P gilt:

1.) K ist separabel über $k(x_1)$.
2.) y ist primitives Element der Erweiterung $K/k(x_1)$.
3.) Ist $\mathfrak{P}$ eine bezüglich x_1 unendliche Stelle von C, so gilt: jede der Funktionen $x_1, y, x_3, \ldots, x_n$ wird bei $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung unendlich.
4.) Die Verzweigungspunkte von $K/k(x_1)$ sind einfache Punkte der Kurve $\Gamma \equiv (1, x_1, y)$.
5.) Der außerwesentliche Diskriminantenteiler $p(x_1, u)$ von y über $k(x_1)$ besitzt nur einfache Nullstellen.
6.) $\Theta_{ij}(u) \neq 0$ für $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$.

Die Projektion $(1, x_1, y, x_\mu) \longrightarrow (1, x_1, y)$ ist eine birationale Abbildung (wegen 1.) und 2.)). Das Bild Γ ist eine ebene Kurve mit dem allgemeinen Punkt $(1, x_1, y)$. Γ besitzt wegen 3.) und 6.) im Unendlichen keine Singularitäten und im Endlichen wegen 4.) und 5.) nur Knoten als Singularitäten.

Par. 2 Der Beweis des Hauptsatzes.

Wir legen uns auf die folgende Bezeichnungsweise fest: die Unbestimmten eines Polynomrings werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, wenn der Ring nicht als graduierter Ring aufgefaßt wird. Wird der Polynomring dagegen als graduierter Ring betrachtet, so bezeichnen wir die Unbestimmten mit großen lateinischen Buchstaben.

4. Ein Satz über die Mannigfaltigkeit der ebenen Knotenkurven.

Γ sei eine ebene, projektive Kurve vom Grad n, $\sum = (Q_1, \ldots, Q_d)$ ein System von d Punkten der projektiven Ebene P^2. P^N sei der Raum der Koeffizienten der ebenen, projektiven Kurven vom Grad n, es ist also $N = \frac{n(n+3)}{2}$. Wir bezeichnen ein Paar $(\sum, \Gamma)$ als regulär vom Gewicht d und vom Grad n, wenn Γ d-fache Knotenkurve vom Grad n ist und $\sum$ das System der d verschiedenen Knoten bedeutet. Wir werden im folgenden das Gewicht und die Ordnung eines regulären Paares gleich in dessen Bezeichnung angeben. Ein Paar $(\sum_d, \Gamma_n)$ soll künftig immer ein reguläres Paar vom Gewicht d und der Ordnung n bezeichnen. Weiter definieren wir, das Paar $(\sum, \Gamma)$ soll irreduzibel heissen, wenn Γ irreduzibel ist.
$(\sum, \Gamma)$ ist Punkt des (d+1)-fach projektiven Raumes $P^{\pi} = P^2_x P^2_x \ldots x P^2_x P^N$, wenn Q_1 aufgefaßt wird als Punkt des ersten Faktors von P^{π}, Q_2 als Punkt des zweiten Faktors von P^{π} und schliesslich Γ als Punkt von P^N.
X_ν, Y_ν, Z_ν seien die Koordinaten des ν-ten Faktors von P^{π} $(\nu = 1, \ldots, d)$, $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ die Koordinaten von P^N $\left(\begin{smallmatrix}\alpha,\beta,\gamma \geq 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = n\end{smallmatrix}\right)$.
Es sei $F_\nu = \sum A_{\alpha,\beta,\gamma} X_\nu^\alpha Y_\nu^\beta Z_\nu^\gamma$. F_ν ist eine Form aus dem Koordinatenring von P^{π}. Wir betrachten die 3d zu P^{π} gehörigen Formen

$$(1)\quad F_\nu\,,\ \frac{\partial F_\nu}{\partial X_\nu}\,,\ \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_\nu} \qquad \nu = 1, \ldots, d\,.$$

$W_{n,d}$ sei die durch das System (1) definierte Mannigfaltigkeit in P^{π}. Wir bemerken: sind die $Q_1, \ldots, Q_d$ singuläre Punkte von Γ, so ist das Paar $(\sum, \Gamma)$ Punkt von $W_{n,d}$ und die Umkehrung gilt ebenfalls.

Es sei (Σ_d^0, Γ_m^0) ein beliebiges, irreduzibles, reguläres Paar von $W_{n,d}$. Wir gehen im Raum P^N zu affinen Koordinaten über. Aus der (d+1)-fach projektiven Mannigfaltigkeit $W_{n,d}$ entsteht dabei eine affine Mannigfaltigkeit $\tilde{W}_{n,d}$. Die affinen Koordinaten sollen im P^N so gewählt sein, daß (Σ_d^0, Γ_m^0) in $\tilde{W}_{n,d}$ liegt. Wir führen die folgende Bezeichnungsweise ein: beim obigen Übergang vom Projektiven zum Affinen entstehende affine Gebilde werden mit der Tilde versehen.

Das beim Übergang zum Affinen aus (1) entstehende System von Polynomen sei

$$(2)\quad \begin{matrix} f_\nu(x_\nu, y_\nu) \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}(x_\nu, y_\nu) \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu}(x_\nu, y_\nu) \end{matrix} .$$

Wir beweisen den Satz:

Satz[2]: Die Tangentialhyperebenen an die 3d Hyperflächen (2) im Punkt $(\tilde{\Sigma}_d^0, \tilde{\Gamma}_m^0)$ sind linear unabhängig.

Beweis: f^0 sei ein $\tilde{\Gamma}_m^0$ definierendes Polynom von minimalem Grad und (x_ν^0, y_ν^0) seien die Knoten von $\tilde{\Gamma}_m^0$. Dann gilt:

$$(2')\quad \begin{matrix} f^0(x_\nu^0, y_\nu^0) = 0 \\ \frac{\partial f^0}{\partial x_\nu}(x_\nu^0, y_\nu^0) = 0 \\ \frac{\partial f^0}{\partial y_\nu}(x_\nu^0, y_\nu^0) = 0 \end{matrix} .$$

Wir betrachten die Tangentialrichtungen an die Hyperflächen (2) im Punkt $(\tilde{\Sigma}_d^0, \tilde{\Gamma}_m^0)$ und zeigen: die Menge dieser Tangentialrichtungen ist ein linearer Raum der Dimension N-d. Dazu sei (dx_ν, dy_ν, df) eine Tangentialrichtung an die Hyperflächen (2) im Punkt $(\tilde{\Sigma}_d^0, \tilde{\Gamma}_m^0)$.

[2] Vgl. Severi [14] und van der Waerden [16] .

Dann gilt:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial f^0}{\partial x_\nu}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dx_\nu + \frac{\partial f^0}{\partial y_\nu}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dy_\nu + df(x_\nu,y_\nu) = 0\\ &\frac{\partial^2 f^0}{\partial x_\nu^2}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dx_\nu + \frac{\partial^2 f^0}{\partial x_\nu \partial y_\nu}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dy_\nu + \frac{\partial}{\partial x_\nu} df(x_\nu^0,y_\nu^0) = 0\\ &\frac{\partial^2 f^0}{\partial y_\nu \partial x_\nu}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dx_\nu + \frac{\partial^2 f^0}{\partial y_\nu^2}(x_\nu^0,y_\nu^0)\,dy_\nu + \frac{\partial}{\partial y_\nu} df(x_\nu^0,y_\nu^0) = 0 \end{aligned}$$

und es genügt zu zeigen, daß die linearen Gleichungen (3) für die dx_ν, dy_ν und die Koeffizienten von df untereinander linear unabhängig sind. Da (x_ν^0, y_ν^0) Knoten ist, gilt

$$\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2}(x_\nu^0,y_\nu^0)\cdot\frac{\partial^2 f^0}{\partial y^2}(x_\nu^0,y_\nu^0) - \left(\frac{\partial^2 f^0}{\partial x_\nu \partial y_\nu}(x_\nu^0,y_\nu^0)\right)^2 \neq 0 .$$

Also kann man aus den letzten beiden Gleichungen von (3) die Differentiale dx_ν und dy_ν berechnen. Wir setzen jetzt $df = h$. Dann ergibt sich aus (3) wegen (2')

$$(4)\quad h(x_\nu^0,y_\nu^0) = 0 \qquad \nu = 1,\dots,d ,$$

d.h. die Kurve h ist zur Kurve f^0 adjungiert und wir haben zu zeigen, daß die Adjungiertheitsbedingungen (4) für die Koeffizienten von h linear unabhängig sind. Wir holen dazu etwas weiter aus und betrachten die folgende Situation:

K/k ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1,
$R = k[u,v]$ ein durch zwei Elemente erzeugter Teilring von K mit Quotientenkörper K,
$\mathfrak{f}_R$ der Führerdivisor von R,
$\mathfrak{F}_R$ das zu $\mathfrak{f}_R$ gehörige Führerideal in R.
Es sei $f(x,y)$ die definierende Gleichung für u,v über k vom Grad n. Durch eine vorbereitende lineare Transformation kann man erreichen, daß v ganz ist über $k[u]$ und f die Form

$$(*)\quad f(x,y) = y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \cdots + c_0$$

mit $c_i \in k[x]$ vom Grad $\leq n-i$ besitzt. Da sich bei linearer

Transformation der Grad von f nicht ändert, hat man die lineare Substitution so zu wählen, daß das transformierte Polynom das Monom y^n enthält. Das ist immer möglich. Es sei $M = \sum k_{ij} u^i v^j$ $\substack{0 \le j < m \\ 0 \le i \le n-j}$ der k-Modul derjenigen Elemente aus R, die sich als Polynome vom Grad n von höchstens n-tem Grade in u und (n-1)-tem Grade in v darstellen lassen. Die k-Dimension von M ist $\frac{n(n+3)}{2}$, denn wegen (*) sind die Elemente $u^i v^j$ linear unabhängig über k und die Anzahl ergibt sich durch Abzählen gerade zu $\frac{n(n+3)}{2}$. Es sei $\mathfrak{m}(u)$ der Nennerdivisor von u, $\mathfrak{m}(u)$ besitzt den Grad n. $N = K(\mathfrak{f}_R \mathfrak{m}(u)^{-m})$ sei der k-Modul der Vielfachen des Divisors $\mathfrak{f}_R \mathfrak{m}(u)^{-m}$. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist seine Dimension gleich $n^2 - 2\delta + g + 1$, wobei g das Geschlecht von K ist (also $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$) und δ der Singularitätsgrad von R, d.h. $\delta = \dim_k(R/\mathfrak{f}_R) = \frac{1}{2}$ Grad $\mathfrak{f}_R$. Vgl. Roquette [11]. Vergleicht man die k-Dimensionen von N und M, so ergibt sich

$$\dim N = \dim M - \delta .$$

Nun gilt erstens $M \cap \mathfrak{f}_R \subset N$, denn die Elemente aus M sind durch $\mathfrak{m}(u)^{-m}$ teilbar, und $\mathfrak{f}_R$ besteht aus Elementen von R, die durch $\mathfrak{f}_R$ teilbar sind und die höchstens Pole bei $\mathfrak{m}(u)$ besitzen. Daher ist $\dim(M \cap \mathfrak{f}_R) \le \dim M - \delta$. Zweitens ist $\dim(M/M \cap \mathfrak{f}_R) = \dim(M + \mathfrak{f}_R/\mathfrak{f}_R) \le \dim(R/\mathfrak{f}_R)$. Zusammengenommen heißt das

$$\dim(M \cap \mathfrak{f}_R) = \frac{n(n+3)}{2} - \delta .$$

Es sei nun $R = k[u,v]$ der Koordinatenring der ebenen Knotenkurve $\tilde{f}_m^0$ bezüglich eines affinen Koordinatensystems der Ebene, das so gewählt sein soll, daß die Knoten von $\tilde{f}_m^0$ nicht im Unendlichen liegen. Die Gleichung f^0 von $\tilde{f}_m^0$ soll die Gestalt (*) besitzen. Dann entsprechen sich die Kurven h, die der Adjungiertheitsbedingung (4) genügen, und die Elemente $M \cap \mathfrak{f}_R$, in der obigen Bezeichnungsweise, umkehrbar eindeutig; d.h. die Dimension des Systems der

ebenen Kurven von höchstens n-tem Grade, die der Bedingung (4) genügen, ist gleich $\frac{n(n+3)}{2} - d$ (für d-fache Knotenkurven ist $\delta = d$), und das war zu beweisen.

5. Ein Henselsches Lemma für Mannigfaltigkeiten.[3]

Das hier aufgeführte Henselsche Lemma benötigen wir zum Beweis des Existenzsatzes II im nächsten Abschnitt.

k sei ein komplett bewerteter Körper der Charakteristik 0, die Bewertung w sei nicht archimedisch und vom Rang 1. Für ein $a \in k$ wird als Absolutbetrag $|a|$ geschrieben und als Wert $w(a)$. Wir normieren $|a|$ durch die Festsetzung $|a| = q^{-w(a)}$, mit $q > 1$.
$\bar{a}$ sei die Restklasse eines ganzen Elements a aus k bezüglich des gegebenen Bewertungshomomorphismus.
$A^n = A^n(k)$ sei der n-dimensionale affine Raum über k, der aus allen n-Tupeln $\mathfrak{x} = (a_1, \ldots, a_n)$ besteht.
Wir normieren A^n, indem wir für einen Vektor $\mathfrak{x} = (a_1, \ldots, a_n)$ als Norm $|\mathfrak{x}| = \mathrm{Max}\,(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ definieren. Dann gilt: $|\mathfrak{x}+\mathfrak{h}| \leq \mathrm{Max}\,(|\mathfrak{x}|, |\mathfrak{h}|)$ für $\mathfrak{x}, \mathfrak{h} \in A^n$. Da k komplett ist, ist auch A^n komplett, d.h. A^n ist ein Banachraum über k.
$f = (f_1, \ldots, f_n)$ sei ein System von Polynomen in n Unbestimmten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzen Koeffizienten aus k.
$\bar{f}$ sei das zugehörige System von Polynomen über $\bar{k}$.

Wir formulieren nun in den obigen Bezeichnungen das Henselsche Lemma.

Henselsches Lemma für Mannigfaltigkeiten.
Voraussetzung: Es gebe einen Punkt $\mathfrak{x}_0 \in A^n$ mit ganzen Koordinaten, so daß

$$(1)\quad \bar{f}(\bar{\mathfrak{x}}_0) = 0, \quad \text{d.h.} \quad |f(\mathfrak{x}_0)| < 1$$

$$(2)\quad \det \bar{f}'(\bar{\mathfrak{x}}_0) \neq 0, \quad \text{d.h.} \quad |\det f'(\mathfrak{x}_0)| = 1.$$

[3] Die Kenntnis dieses Henselschen Lemmas verdanke ich einer Mitteilung Professor Roquettes. Der Beweis des Hauptsatzes wurde damit erheblich kürzer.

Behauptung: Es gibt einen Punkt $\mathfrak{a} \in A^n$ mit

$$(3) \quad f(\mathfrak{a}) = 0$$

$$(4) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad |\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0| < 1 .$$

Beweis: Wir wollen mit Hilfe des Newtonschen Approximationsverfahrens den Vektor $\mathfrak{a}$ gewinnen. Wir setzen $\mathfrak{a} = \lim \mathfrak{a}_\lambda$ mit $\mathfrak{a}_{\lambda+1} = \mathfrak{a}_\lambda - f'(\mathfrak{a}_0)^{-1} f(\mathfrak{a}_\lambda)$. Wenn die Folge $\mathfrak{a}_\lambda$ konvergiert, so gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} - f'(\mathfrak{a}_0) f(\mathfrak{a})$, also $f(\mathfrak{a}) = 0$. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{a}_\lambda$ in der Tat konvergiert. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{a}_\lambda$ Cauchyfolge ist. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{a}_0 = 0$ und die Funktionalmatrix $f'(\mathfrak{a}_0)$ gleich der Einheitsmatrix E ist. Sollte das nicht der Fall sein, so kann man es durch die Koordinatentransformation $x \longrightarrow f'(\mathfrak{a}_0)^{-1} \cdot (x - \mathfrak{a}_0)$ erreichen.

Dann besitzt f die Gestalt $f(x) = \mathfrak{b} + x + h(x)$, wobei $h(x)$ ein System von Polynomen bezeichnet, in welchem nur Monome vom Grad ≥ 2 vorkommen. Durch vollständige Induktion folgt $W(\mathfrak{a}_\lambda) \geq W(\mathfrak{b})$, für $\lambda = 0,1,2,\ldots$.
Wir zeigen dann

$$(*) \quad W(\mathfrak{a}_{\lambda+1} - \mathfrak{a}_\lambda) \geq W(\mathfrak{b}) + W(\mathfrak{a}_\lambda - \mathfrak{a}_{\lambda-1}).$$

Dazu wird $h(x) = \sum_{s(\mathfrak{g})\geq 2} \mathfrak{h}_\mathfrak{g} x^\mathfrak{g}$ gesetzt, wobei $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m)$ Vektoren mit ganzzahligen Koeffizienten $\mathfrak{g}_\mu \geq 0$ durchlaufen und $x^\mathfrak{g} = x_1^{\mathfrak{g}_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\mathfrak{g}_m}$ bedeutet. $\mathfrak{h}_\mathfrak{g}$ sind Vektoren aus A^n mit $W(\mathfrak{h}_\mathfrak{g}) \geq 0$. Es ist $s(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_m$ der Grad des Monoms $x^\mathfrak{g}$.

Es gilt: $\mathfrak{a}_{\lambda+1} - \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda - \mathfrak{a}_{\lambda-1} - f'(\mathfrak{a}_0)^{-1}(f(\mathfrak{a}_\lambda) - f(\mathfrak{a}_{\lambda-1})) = -(h(\mathfrak{a}_\lambda) - h(\mathfrak{a}_{\lambda-1}))$
und somit $W(\mathfrak{a}_{\lambda+1} - \mathfrak{a}_\lambda) = W(h(\mathfrak{a}_\lambda) - h(\mathfrak{a}_{\lambda-1})) \geq \min_\mathfrak{g} W(\mathfrak{a}_\lambda^\mathfrak{g} - \mathfrak{a}_{\lambda-1}^\mathfrak{g})$.
Es bleibt also zu zeigen $W(\mathfrak{a}_\lambda^\mathfrak{g} - \mathfrak{a}_{\lambda-1}^\mathfrak{g}) \geq W(\mathfrak{b}) + W(\mathfrak{a}_\lambda - \mathfrak{a}_{\lambda-1})$ für $s(\mathfrak{g}) \geq 2$.

Für Vektoren $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in A^n$ mit $W(\mathfrak{M}), W(\mathfrak{N}) \geq 0$ gilt nun:

$$W(\mathfrak{M}^\mathfrak{g} - \mathfrak{N}^\mathfrak{g}) \geq \min(W(\mathfrak{M}), W(\mathfrak{N}) + W(\mathfrak{M} - \mathfrak{N})) \quad \text{falls } s(\mathfrak{g}) \geq 2 .$$

Man erkennt dies, indem man $x^\mathfrak{g} = (y - (x-y))^\mathfrak{g} = R(x, y-x)$ als Polynom in $x, x-y$ schreibt. R ist homogen vom Grade $s(\mathfrak{g})$ und der Koeffizient von $y^\mathfrak{g}$ ist 1. Also besitzt R die Form: $R(x,y-x) = y^\mathfrak{g} + \sum'_{\sigma,\tau} a_{\sigma,\tau}\, y^\sigma (x-y)^\tau$, wobei summiert wird über die Paare (σ,τ) mit $s(\sigma) + s(\tau) = s(\mathfrak{g})$. Der Strich am Summenzeichen deutet an, daß $s(\tau) > 0$ ist. $a_{\sigma,\tau}$ sind ganzrationale

Zahlen. Benutzt man noch die Regel $w(\mathfrak{T}^\varrho) \geq s(\varrho)\cdot w(\mathfrak{T})$ für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{T} \in A^n$, so gilt: $w(\mathfrak{M}^\varrho - \mathfrak{A}^\varrho) \geq \min_{\sigma,\tau}\left(s(\sigma)w(\mathfrak{A}) + s(\tau)w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})\right)$.

Es ist $w(\mathfrak{A}) \geq \min\left(w(\mathfrak{M}), w(\mathfrak{A})\right)$. Ist daher $s(\sigma) > 0$, so gilt wegen $s(\tau) > 0$: $s(\sigma)\,w(\mathfrak{A}) + s(\tau)\,w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) \geq \min\left(w(\mathfrak{M}), w(\mathfrak{A})\right) + w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})$.

Ist aber $s(\sigma) = 0$, so ist $s(\tau) = s(\varrho) \geq 2$ und daher

$s(\tau)\,w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) \geq w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) + w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) \geq \min\left(w(\mathfrak{M}), w(\mathfrak{A})\right) + w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})$.

Zusammengenommen folgt: $w(\mathfrak{M}^\varrho - \mathfrak{A}^\varrho) \geq \min\left(w(\mathfrak{M}), w(\mathfrak{A})\right) + w(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})$ falls $s(\varrho) \geq 2$.

Für $\mathfrak{M} = \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_{i-1}$ ergibt sich wegen $w(\mathfrak{a}_i) \geq w(k)$, $w(\mathfrak{a}_{i-1}) \geq w(k)$ die Ungleichung $w(\mathfrak{a}_i^\varrho - \mathfrak{a}_{i-1}^\varrho) \geq w(k) + w(\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1})$, also die Relation (*).

Aus (*) ergibt sich: $\mathfrak{a}_i$ ist Cauchyfolge und wegen $\bar{\mathfrak{a}}_i = \bar{\mathfrak{a}}_0$ ist $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}_0$.

<u>Verallgemeinerung:</u> Ist $f = (f_1, \ldots, f_r)$ ein System von Polynomen ($r \leq n$), so gilt die entsprechende Aussage, wenn man (2) ersetzt durch die Forderung

(5) $\overline{f'}(\bar{\mathfrak{a}}_0)$ besitze den Höchstrang r.

Beweis: Man fügt Polynome $f_{r+1}, \ldots, f_n$ so hinzu, daß für das System $(f_1, \ldots, f_n)$ die Aussagen (1) und (2) gelten. Daß dies immer möglich ist, sieht man wie folgt. Die Aussage (5) besagt, daß die Zeilenvektoren $\left(\frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial x_\mu}(\bar{\mathfrak{a}}_0)\right)_{\nu=1,\ldots,r} = \bar{\mathfrak{M}}_\lambda$ der Matrix $\overline{f'}(\bar{\mathfrak{a}}_0)$ linear unabhängig sind. Nun kann man die Vektoren $\bar{\mathfrak{M}}_\lambda$ als Hyperebenen $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_r$ des $\bar{A}^n$ deuten. Wir wählen die Polynome $f_{r+1}, \ldots, f_n$ aus $k[x]$ so, daß die Bedingungen a) - d) erfüllt sind:

a) Die Koeffizienten der f_ν sind ganz und nicht alle durch $\mathfrak{p}$ teilbar.
b) $\bar{f}_\nu$ sind lineare Polynome.
c) $\bar{f}_\nu(\bar{\mathfrak{a}}_0) = 0$.
d) Bezeichnen $\bar{E}_{r+1}, \ldots, \bar{E}_n$ die durch die Polynome $\bar{f}_\nu(x)$ $(\nu = r+1, \ldots, n)$ definierten Hyperebenen des $\bar{A}^n$, so sind die Hyperebenen $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_r, \bar{E}_{r+1}, \ldots, \bar{E}_n$ linear unabhängig.

Das System der Polynome $(f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ erfüllt dann die Bedingungen (1) und (2).

Geometrische Formulierung der obigen Aussage.
Sei $V = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ Durchschnitt von r Hyperflächen $H_i \subset A^n$ mit $r \leq n$, deren definierende Polynome f_i ganzzahlige Koordinaten in k besitzen, und seien $\overline{H}_i$ die Hyperflächen über $\overline{k}$, die durch $\overline{f}_i$ definiert sind, und $\overline{V} = \overline{H}_1 \cap \ldots \cap \overline{H}_r$. Dann gilt: jeder Punkt $\alpha \in \overline{V}$, für den die Tangentialhyperebenen an die $\overline{H}_i$ linear unabhängig sind, ist Bild eines Punktes $a \in V$.

6. Der Beweis des Existenzsatzes II.

Der Körper $\overline{k}$ sei vollkommen. Es sei k ein Körper der Charakteristik 0 mit einer kompletten Stelle $\mathfrak{P}$ vom Rang 1 und $\overline{k}$ als Restklassenkörper. $\overline{W}_{n,d} = \overline{W}_{n,d}(\overline{k})$ sei die in Abschnitt 4 eingeführte Mannigfaltigkeit über $\overline{k}$.
$W_{n,d} = W_{n,d}(k)$ sei dieselbe Mannigfaltigkeit über k. Es sei $\overline{\Gamma}$ eine irreduzible d-fache Knotenkurve vom Grad n mit Koeffizienten aus $\overline{k}$. $\overline{\Sigma}$ sei das System der d Knoten von $\overline{\Gamma}$ und $\overline{F}^0$ sei ein $\overline{\Gamma}$ definierendes Polynom.
Wir wollen zeigen: $\overline{\Gamma}$ besitzt modulo $\mathfrak{P}$ als Urbild eine ebene, d-fache Knotenkurve Γ mit Koeffizienten aus k.
Bewiesen wird dies mit Hilfe der Mannigfaltigkeiten $\overline{W}_{n,d}(\overline{k})$ und $W_{n,d}(k)$. Wir gehen zu affinen Koordinaten über, so daß das Paar $(\overline{\Sigma}, \overline{\Gamma})$ zu dem affinen Punkt $(\tilde{\overline{\Sigma}}, \tilde{\overline{\Gamma}})$ wird.
Die Tangentialhyperebenen im Punkt $(\tilde{\overline{\Sigma}}, \tilde{\overline{\Gamma}})$ an die 3d Hyperflächen (2) aus Abschnitt 4 sind linear unabhängig, aber $(\tilde{\overline{\Sigma}}, \tilde{\overline{\Gamma}})$ braucht nicht rational über $\overline{k}$ zu sein. Nehmen wir zuerst an, daß die Koordinaten der Knoten von $\tilde{\overline{\Gamma}}$ in $\overline{k}$ liegen. Dann besitzt nach unserem Henselschen Lemma $(\tilde{\overline{\Sigma}}, \tilde{\overline{\Gamma}})$ modulo $\mathfrak{P}$ ein Urbild $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Gamma})$ in $W_{n,d}$ mit Koeffizienten aus k und die Kurve Γ leistet das Gewünschte. Γ ist d-fache Knotenkurve, weil Γ d Singularitäten hat und die Reduktion $\overline{\Gamma}$ d-fache Knotenkurve ist.
Sind die Knoten $\tilde{\overline{\Sigma}}$ von $\tilde{\overline{\Gamma}}$ nicht rational über $\overline{k}$, so bedarf es einer Zusatzüberlegung, denn unser Henselsches Lemma liefert zunächst einen Punkt $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Gamma})$ mit Koeffizienten in einem Erweiterungskörper von k. Wir wollen zeigen, daß man es so einrichten kann, daß wenigstens die Koeffizienten

von $\widetilde{\Gamma}$ in k liegen. Wir nehmen als neuen Grundkörper den Körper $\bar{l} = \bar{k}(\widetilde{\bar{\Sigma}})$. $\bar{l}$ ist separabel über $\bar{k}$, denn nach Voraussetzung ist $\bar{k}$ vollkommen. Da jeder $\bar{k}$-Isomorphismus von $\bar{l}$ in die algebraisch abgeschlossene Hülle von $\bar{l}$ die Knoten von $\widetilde{\bar{\Gamma}}$ permutiert, ist $\bar{l}/\bar{k}$ auch galoisch.
Es sei m der Grad der Erweiterung $\bar{l}/\bar{k}$ und l die unverzweigte Erweiterung von k vom Grad m. Dann weiss man: l/k ist galoissch, und die Galoisgruppen von l/k und $\bar{l}/\bar{k}$ sind in natürlicher Weise isomorph.
Es sei $\widetilde{\Sigma}_0=(P_1,\dots,P_d)$ ein Urbild von $\widetilde{\bar{\Sigma}}=(\bar{P}_1,\dots,\bar{P}_d)$ in l, so daß die Automorphismen von l/k die Punkte P_ν genauso permutieren wie die zugehörigen Automorphismen von $\bar{l}/\bar{k}$ die Punkte $\bar{P}_\nu$. $(\bar{x}_\nu^0,\bar{y}_\nu^0)$ seien die Koordinaten von $\bar{P}_\nu$, und $\widetilde{\Gamma}_0$ sei ein Urbild von $\widetilde{\bar{\Gamma}}$ mit Koeffizienten aus k. Wir betrachten die zu (3) aus Abschnitt 4 gehörige Matrix $\bar{A}$ über $\bar{l}$:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\bar{x}_\nu^0)^m & (\bar{x}_\nu^0)^{m-1}\dots & (\bar{x}_\nu^0)^{m-\frac{m}{p^\alpha}}\dots \\ \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x_\nu^2}(\bar{x}_\nu^0,\bar{y}_\nu^0) & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x_\nu\partial y_\nu}(\bar{x}_\nu^0,\bar{y}_\nu^0) & 0 & m(\bar{x}_\nu^0)^{m-1}\dots & \\ \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y_\nu\partial x_\nu}(\bar{x}_\nu^0,\bar{y}_\nu^0) & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y_\nu^2}(\bar{x}_\nu^0,\bar{y}_\nu^0) & 0 & (\bar{x}_\nu^0)^{m-1}\dots & \end{pmatrix}$$

und fassen die Zeilen von $\bar{A}$ als Vektoren $\bar{\alpha}_{\nu,1},\dots,\bar{\alpha}_{\nu,2d}$ auf.
$\bar{L}$ sei der Raum aller Linearkombinationen aus Vektoren $\bar{\alpha}_{\nu,\mu}$ bei denen die ersten 2d Koordinaten bezüglich der vorgegebenen Basis verschwinden. Offensichtlich ist $\bar{L}$ ein linearer Raum der Dimension d und wird erzeugt von den Vektoren $\bar{\alpha}_{\lambda+3\nu}$, $\nu=0,\dots,d-1$. Es gibt deshalb N-d Vektoren $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_{N-d}$ mit Koeffizienten aus $\bar{k}$, deren erste 2d Koordinaten bezüglich der vorgegebenen Basis null sind und die zusammen mit den Vektoren $\bar{\alpha}_{\nu,1},\dots,\bar{\alpha}_{\nu,2d}$ den Raum $P^{\pi}(\bar{k})$ aufspannen.
Wir interpretieren die Vektoren $\bar{b}_\nu$ als Hyperebenen durch den Nullpunkt. Dann seien $\bar{h}_1,\dots,\bar{h}_{N-d}$ die definierenden Polynome derjenigen Hyperebenen, die durch den Punkt $(\widetilde{\bar{\Sigma}}_1,\widetilde{\bar{\Gamma}})$ gehen und parallel zu den Hyperebenen $\bar{b}_\nu$ sind. $h_1,\dots,h_{N-d}$ seien die definierenden Polynome von Hyperebenen im Raum $P^{\pi}(k)$ durch den Punkt $(\widetilde{\Sigma}_0,\widetilde{\Gamma}_0)$. Weiter sollen die ersten 2d Koordinaten dieser Hyperebenen bezüglich des vorgegebenen

Koordinatensystems null sein.
Wir betrachten dann das folgende System f von Polynomen über l:

$$f = (f_1, \partial_1 f_1, \partial_2 f_1, \ldots, f_d, \partial_1 f_d, \partial_2 f_d, h_1, \ldots, h_{N-d})$$

in den Unbestimmten $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1,\ldots,d}$, $(z_\mu)_{\mu=1,\ldots,N}$ und das zugehörige System $\bar{f} = (\bar{f}_1, \partial_1 \bar{f}_1, \partial_2 \bar{f}_1, \ldots, \bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_{N-d})$ über $\bar{l}$. Dann sind die Voraussetzungen für unser Henselsches Lemma für das System f und den Punkt $(\bar{\Sigma}_0, \bar{\Gamma}_0)$ von P^{π} erfüllt. Wir wollen zeigen, daß das Newtonsche Approximationsverfahren in diesem Fall einen Wert $a = (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma})$ mit $f(a) = 0$ liefert, wobei $\bar{\Gamma}$ Koeffizienten in k besitzt. Es genügt dazu offensichtlich zu zeigen, daß für jeden Schritt $a_\nu = (\bar{\Sigma}_\nu, \bar{\Gamma}_\nu)$ so geartet ist, daß $\bar{\Gamma}_\nu$ Koeffizienten aus k besitzt. Wir werden den Beweis für a_1 führen, das andere folgt durch Induktion.
Es ist $f'(\bar{\Sigma}_0, \bar{\Gamma}_0)(a_1 - a_0) = -f(a_0)$, und dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Bei einem Automorphismus σ von l/k bleiben die letzten N-d Gleichungen des obigen Systems unverändert, die ersten 3d Gleichungen permutieren sich zu Tripeln entsprechend der Permutation in $\bar{\Sigma}_0$, die zu σ gehört. Daraus ergibt sich aber, daß die letzten N Koordinaten von a_1 invariant bleiben bei jedem Automorphismus und deshalb in k liegen.

7. Der Beweis des Hauptsatzes.

Der Körper $\bar{k}$ sei vollkommen und besitze unendlich viele Elemente. k sei ein Körper der Charakteristik 0 mit einer kompletten Stelle $\mathfrak{p}$ vom Rang 1 und $\bar{k}$ als Restklassenkörper. $\bar{K}/\bar{k}$ sei ein Funktionenkörper vom Geschlecht g, und $\bar{k}$ sei der genaue Konstantenkörper von $\bar{K}/\bar{k}$.
Wir wissen nach Existenzsatz I, daß $\bar{K}/\bar{k}$ eine ebene, irreduzible Knotenkurve $\bar{\Gamma}$ mit Koeffizienten aus $\bar{k}$ als Modell besitzt. $\bar{\Sigma}$ sei das System der Knoten von $\bar{\Gamma}$. Es ist $(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in W_{n,d}(\bar{l})$. (Σ, Γ) sei ein Urbild von $(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma})$ in $W_{n,d}(l)$, so daß Γ Koeffizienten in k besitzt. K sei

der Funktionenkörper von Γ. Dann ist Γ irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{P}$ sei die zu $\mathfrak{p}$ und Γ nach Satz 1 gehörige Stelle von K/k. Es gilt $K\mathfrak{P} = \overline{K}$ und $g(K/k) = g(\overline{K}/\overline{k})$, weil die Grade und Singularitätszahlen von Γ und $\overline{\Gamma}$ übereinstimmen. (Vgl. Abschnitt 1.) $\overline{K}/\overline{k}$ ist dann reguläre Reduktion von K/k modulo $\mathfrak{p}$.

Literaturverzeichnis

[1] W.-L. Chow, Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper. Mathematische Annalen 114(1937), 655-682.

[2] M. Deuring, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Mathematische Zeitschrift 47(1942), 643-654.

[3] M. Deuring, Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlecht Eins. II. Nachr. Akad.Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 1955, 13-42.

[4] A. Grothendieck, Séminaire de géométrie algébrique de l' Institute des Hautes Etudes Scientifiques, 1960. III-Morphismes simples: Propriétés de prolongement.

[5] H. Hasse, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 52(1942), 1-48.

[6] H. Hasse, Zahlentheorie. Berlin 1963

[7] E. Lamprecht, Restabbildungen von Divisoren. Archiv der Mathematik 8(1957), 255-264.

[8] S. Lefschetz, Algebraic Geometry. Princeton 1953.

[9] M.T. Muhly and O. Zariski, The resolution of singularities of an algebraic curve. American Journal of Mathematics 61 (1939), 107-114.

[10] P. Roquette, Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten. Journal für die reine und angewandte Mathematik 200(1958), 1-44.

[11] P. Roquette, Über den Singularitätsgrad von Teilringen in Funktionenkörpern. Mathematische Zeitschrift 77(1961), 228-240.

[12] M. Rosenlicht, Equivalence relations on algebraic curves. Annals of Mathematics 56(1952), 169-191.

[13] O.F.G. Schilling, The Theory of Valuations. New York 1950.

[14] F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie. Leipzig 1921.

[15] G. Shimura, Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. American Journal of Mathematics 77(1955), 134-176.

[16] B.L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie XI. Mathematische Annalen 114(1937), 683-699.

[17] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra. Volume II. New York 1960.

Lebenslauf

Am 16. Mai 1936 wurde ich, Herbert Popp, als Sohn des Elektrikers Franz Popp und seiner Ehefrau Anna, geborene Lenk, in Hals im Sudetenland geboren. Ich besuchte dort die ersten drei Volksschulklassen. Nach der Vertreibung 1946 wohnte ich mit meinen Eltern in Altbach am Neckar. Dort besuchte ich die 4. Volksschulklasse und anschliessend das Schelztorgymnasium in Esslingen. Nach der Reifeprüfung im Frühjahr 1956 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen. Ich studierte in Tübingen mit Ausnahme des Wintersemesters 1959/60. Während dieses Semesters war ich an der Universität Zürich immatrikuliert. Ich bestand im Frühjahr 1962 die wissenschaftliche Prüfung für das höhere Lehramt. Seit April 1963 bin ich Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren B. Huppert, B. Baron von Freytag gen.Löringhoff, H. Kneser, M. Müller, R. Nevanlinna, G. Pickert, P. Roquette, B.L. van der Waerden und H. Wielandt.